

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Инварианты и картинки
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.О. Мантуров, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 06.03.2023

## Аннотация

Свободные группы замечательны тем, что каждый элемент однозначно представим единственной нормальной формой - словом, не допускающим сокращений. В теории виртуальных узлов автором обнаружены инварианты, принимающие значения в диаграммах узлов (точнее, в их линейных комбинациях).

Подобного рода явления - инварианты со значениями в картинках - встречаются повсеместно в алгебре и в топологии. Такие инварианты позволяют судить о форме (геометрии) объекта исходя из "внешнего вида" его представителя. В курсе обсуждаются многочисленные случаи построения таких инвариантов.

В частности, обсуждается теория четностей и теория групп  $G_{-n}^k$  и реализующих принципы: если диаграмма достаточно сложна (локально минимальна), то она реализует сама себя, а также: любая динамическая система, описывающая движение  $n$  частиц и обладающая "хорошим свойством", зависящим от  $k$  частиц, обладает топологическими инвариантами со значениями в  $G_{-n}^k$ . Группы  $G_{-n}^k$  имеют множество эпиморфных отображений на свободные группы.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

изучить многочисленные научные задачи и новые направления в топологии, алгебре и геометрии.

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области теории узлов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории узлов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области теории узлов.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории узлов;
- современные проблемы соответствующих разделов теории узлов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикл;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории узлов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Свободные группы	8	7		16
2	Свободные узлы	6	9		19
3	Группы $G_n^k$ .	7	8		22
4	Группы $\Gamma_n^k$ и многообразия триангуляций	9	6		18
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

###### 1. Свободные группы

Лемма о диаманте. Диаграммы ван Кампена. Теорема Гриндлингера. Кривые на поверхностях, виртуальные узлы, плоские узлы.

###### 2. Свободные узлы

Теория четностей. Кобордизмы свободных узлов.

###### 3. Группы $G_n^k$ .

Фундаментальный принцип о системах движения  $n$  частиц со свойством коразмерности

1, задаваемом  $k$  частицами

$G_n^k$  и алгебра

$G_n^k$  и топология

$G_n^k$  и геометрия

$G_n^k$  и алгебраическая геометрия

###### 4. Группы $\Gamma_n^k$ и многообразия триангуляций

Отображения виртуальных узлов в классические узлы. Отображения классических узлов в виртуальные узлы.

**5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

**6.Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Введение в топологию [Текст] / Ю. Г. Борисович [и др.] - М.Наука : Физматлит,1995

Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология [Текст] / А. Хатчер гпер. с англ. В. В. Прасолова ; под ред. Т. Е. Панова - М.МЦНМО,2011

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Учебная аудитория, экран и проектор.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>3</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** В.О. Мантуров, д-р физ.-мат. наук

# 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Инварианты и картинки» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории узлов;
- современные проблемы соответствующих разделов теории узлов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории узлов.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

- 1) Свободные группы. Лемма о диаманте.
- 2) Диаграммы ван Кампена. Теорема Гриндлингера.
- 3) Кривые на поверхностях, виртуальные узлы, плоские узлы.
- 4) Свободные узлы. Теория четностей.
- 5) Кобордизмы свободных узлов.
- 6) Группы  $G_{\{n\}^k}$ . Фундаментальный принцип о системах движения  $n$  частиц со свойством коразмерности 1, задаваемом  $k$  частицами.
- 7)  $G_{\{n\}^k}$  и алгебра.
- 8)  $G_{\{n\}^k}$  и топология.
- 9)  $G_{\{n\}^k}$  и геометрия.
- 10)  $G_{\{n\}^k}$  и алгебраическая геометрия.
- 11) Группы  $\Gamma_{\{n\}^k}$  и многообразия триангуляций.
- 12) Отображения виртуальных узлов в классические узлы.
- 13) Отображения классических узлов в виртуальные узлы.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Вычислить коэффициент зацепления для Уайтхеда.



2. Проверить, что при замене проходов на переходы в скобке Кауфмана происходит замена  $a \rightarrow b$ ;
3. Посчитать скобку Кауфмана для левого трилистника.
4. Посчитать инвариант Конвея для восьмерки.
5. Найти представление фундаментальной группы правого трилистника.
6. Вычислить определитель узлов для  $5_1$ .
7. Уточнить, что для какого простого числа  $p$  можно нетривиально раскрасить узел  $5_1$  квандлом  $(Z_p, *)$ ,  $a*b = 2b - a$ .
8. Сформулировать теорему Александра и теорему Маркова.
9. Преобразовать диаграмму по теореме Александра и теореме Маркова в форму косы.
10. Вычислить примитивные элементы для алгебры хордовых диаграмм, в которых есть одночленные соотношения, для порядков 2 и 3.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.